

4.3

1 函数 $f(x) = x + \sqrt{1-x}$ 的单调^减区间为——

解: $f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$ 令 $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$, 当 $x < \frac{3}{4}$ 时,
 $f'(x) > 0$, $\frac{3}{4} < x < 1$ 时 $f'(x) < 0$, 故单调减区间为 $(\frac{3}{4}, 1)$

注, 若答案为 $[\frac{3}{4}, 1)$ 亦正确, 一般习惯指的是开区间. 以后
 不再重复说明

2 方程 $\ln x = \frac{x}{2e}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内实根个数为——

解: 设 $f(x) = \ln x - \frac{x}{2e}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - \frac{x}{2e}) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - \frac{x}{2e}) = -\infty$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2e} \quad \text{令 } f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2e$$

当 $0 < x < 2e$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x > 2e$ 时, $f'(x) < 0$

$f(2e) = \ln(2e) - \frac{2e}{2e} = \ln 2 > 0$ 为 $f(x)$ 的最大值点

由介值定理 ~~推~~ $\exists \xi_1 \in (0, 2e)$, $\xi_2 \in (2e, +\infty)$ 使得

$f(\xi_1) = 0$ $f(\xi_2) = 0$, 所以在 $(0, +\infty)$ 内实根个数为 2

注, 若函数在区间上单调, 则取到且只取到一次中间值

3 设函数 $f(x) = a \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$ 在 $x = \frac{\pi}{3}$ 处取极值, 则 $a =$ ——

解: $f'(x) = a \cos x + \cos 3x$, 由 $f'(\frac{\pi}{3}) = 0 \Rightarrow$

$$a \cos \frac{\pi}{3} + \cos \pi = 0 \Rightarrow a = 2$$

4 函数 $f(x) = x + 2 \cos x$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值

解: $f'(x) = 1 - 2 \sin x$ 令 $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

$$f(0) = 0 + 2 \cos 0 = 2 \quad f(\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{6} + 2 \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$$

$$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} + 2 \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\max_{0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}} f(x) = \max \{f(0), f(\frac{\pi}{6}), f(\frac{\pi}{2})\} = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} = f(\frac{\pi}{6})$$

二 1 判断函数 $y = x^2 \ln x$ 的单调性

解: $y' = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x \quad x > 0$

令 $y' = 0 \Rightarrow x(2 \ln x + 1) = 0 \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$

当 $0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$ 时, $y' < 0$; 当 $x > e^{-\frac{1}{2}}$ 时, $y' > 0$

所以 $y = x^2 \ln x$ 在 $(0, e^{-\frac{1}{2}})$ 上单调递减, 在 $(e^{-\frac{1}{2}}, +\infty)$ 上单调递增.

2 求函数 $y = x^3 - 3x + 5$ 的单调区间

解: $y' = 3x^2 - 3$ 令 $y' = 0 \Rightarrow x = 1$ 或 $x = -1$, 列表如下

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	+	0	-	0	+
y	单调增		单调减		单调增

所以 $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$ 为函数的单调增区间, $(-1, 1)$ 为函数的单调减区间。

3. 求函数 $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$ 的极值.

解: $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{2}{3}(1-x)^{-\frac{1}{3}}(-1)$
 $= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(1-x)^{-\frac{1}{3}}[(1-x) - 2x]$
 $= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(1-x)^{-\frac{1}{3}}(1-3x)$

$f(x)$ 在 $x=0$, $x=1$ 处导数不存在, 令 $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

$f(0) = 0^{\frac{1}{3}}(1-0)^{\frac{2}{3}} = 0$ $f(1) = 1^{\frac{1}{3}}(1-1)^{\frac{2}{3}} = 0$

$f(\frac{1}{3}) = (\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}(1-\frac{1}{3})^{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$

$x < 0$ 时, $f'(x) > 0$; $0 < x < \frac{1}{3}$ 时, $f'(x) > 0$

$\frac{1}{3} < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$; $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$

$f(x)$ 在 $x = \frac{1}{3}$ 处取极大值 $\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$, $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取极小值 0

二 4 求函数 $f(x) = (x-2)^2(x+1)^{\frac{2}{3}}$ 在 $[-2, 2]$ 上的最大值与最小值

$$\begin{aligned}\text{解: } f'(x) &= 2(x-2)(x+1)^{\frac{2}{3}} + (x-2)^2 \cdot \frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}} \\ &= (x-2)(x+1)^{-\frac{1}{3}} \left[2(x+1) + \frac{2}{3}(x-2) \right] \\ &= (x-2)(x+1)^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{8}{3}x + \frac{2}{3} \right)\end{aligned}$$

$$\text{令 } f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2, x = -\frac{1}{4}$$

$$f(-2) = (-2-2)^2(-2+1)^{\frac{2}{3}} = (-4)^2 \times (-1)^{\frac{2}{3}} = 16$$

$$f(2) = (2-2)^2(2+1)^{\frac{2}{3}} = 0$$

$$f(-\frac{1}{4}) = (-\frac{1}{4}-2)^2(-\frac{1}{4}+1)^{\frac{2}{3}} = \frac{9^2}{16} \times (\frac{3}{4})^{\frac{2}{3}}$$

$$\max\{f(-2), f(2), f(-\frac{1}{4})\} = 16 \quad \min\{f(-2), f(2), f(-\frac{1}{4})\} = 0$$

于是, $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上的最大值为 16, 最小值为 0。

5 求函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 7$ 的单调区间与极值点。

$$\text{解: } f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$$

$$\text{令 } f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ 或 } x = 3, \text{ 列表}$$

x	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗ 增	极大值 $f(-1)$	↘ 减	极小值 $f(3)$	↗ 增

由上面的列表知, $(-\infty, -1)$ 和 $(3, +\infty)$ 为单调递增区间, $(-1, 3)$ 为单调递减区间。

极大值点为 $x = -1$, 极小值点为 $x = 3$

6 设函数 $f(x) = a \ln x + b x^2 - 3x$ 在 $x=1, x=2$ 处取极值, 求 a, b 及 $f(x)$ 极值.

解: 由题意知
$$\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f'(2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{x} + 2bx - 3 \big|_{x=1} = 0 \\ \frac{a}{x} + 2bx - 3 \big|_{x=2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2b - 3 = 0 \\ \frac{a}{2} + 4b - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = 2, b = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \frac{a}{x} + 2bx - 3 = \frac{2}{x} + x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ 或 } x = 2$$

$$\text{当 } x < 1 \text{ 时 } f''(x) = -\frac{2}{x^2} + 1$$

$$x = 1 \text{ 时, } f''(1) < 0, \text{ 此时取极大值 } f(1) = -\frac{5}{2}$$

$$x = 2 \text{ 时, } f''(2) > 0, \text{ 此时取极小值 } f(2) = 2 \ln 2 + 2 - 6 = 2 \ln 2 - 4$$

7 求函数 $f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} x \left(\frac{t-x}{t+x} \right)^t$ 的极值

$$\text{解: } f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} x \left(1 + \frac{-2x}{t+x} \right)^{\frac{t+x}{-2x}} \cdot \frac{-2x}{t+x} t = \begin{cases} x e^{-2x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\therefore f(x) = x e^{-2x} \quad x \in \mathbb{R}$$

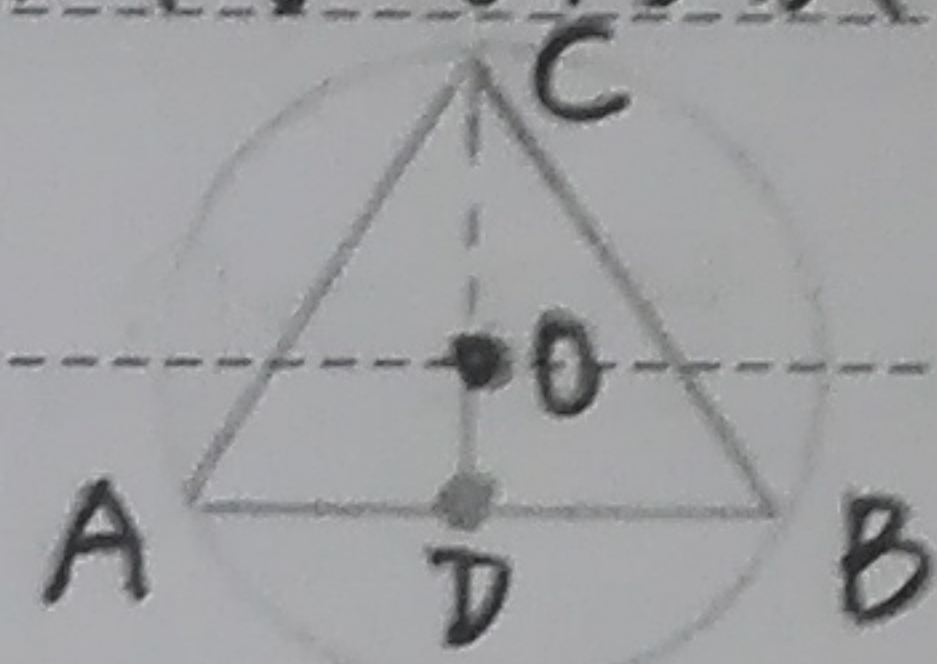
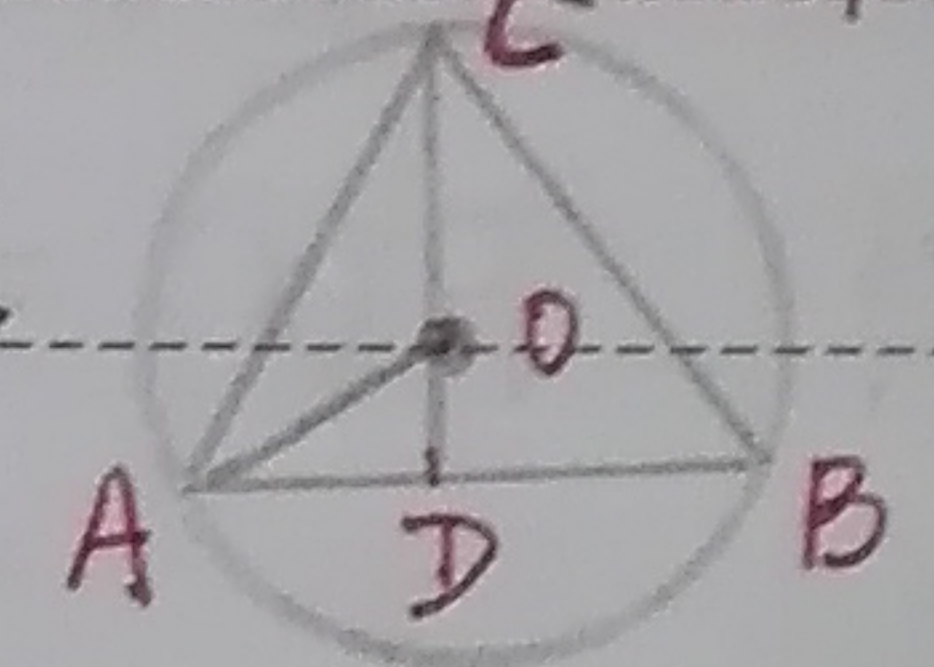
$$f'(x) = e^{-2x} (1 - 2x) \quad \text{令 } f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -2e^{-2x} (1 - 2x) + e^{-2x} \cdot (-2) = -2e^{-2x} (2 - 2x)$$

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) < 0, \therefore f(x) \text{ 在 } x = \frac{1}{2} \text{ 处取极大值 } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2e}$$

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
阅卷人											

注意: 答题时应注明题号, 并按题号顺序答题。

题号	答题内容
P73 4.3节	廖国勇
8	在半径为R的球内作内接正圆锥, 试求圆锥体积最大时的高及最大体积 解: 半径为R的球内能做且只能做一个正圆锥 $\triangle ABC$ 为正三角形, $OC=R$, 则由三角形知识,  $CD = \frac{3}{2}R$, $AD = \frac{\sqrt{3}}{2}R$, 于是圆锥体积 $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot AD^2 \cdot CD = \frac{3\pi}{8}R^3$ 注, 若内接的是圆锥, 不是正圆锥。下面就内接是圆锥的情况求解 解: 设圆锥的高为 x, 即 $CD=x$, $0 < x < 2R$ $OA=OC=R$, 在直角三角形 OAD 中  $OA^2 = OD^2 + AD^2 \Rightarrow R^2 = (x-R)^2 + AD^2 \Rightarrow AD^2 = 2Rx - x^2$ 所以圆锥体体积 $V(x) = \frac{1}{3} \pi AD^2 \cdot CD = \frac{1}{3} \pi \cdot (2Rx - x^2) \cdot x$ $= \frac{1}{3} \pi (2Rx^2 - x^3)$ $V'(x) = \frac{1}{3} \pi (4Rx - 3x^2)$ 令 $V'(x)=0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}R$ 或 $x=0$ (舍去) $V''(x) = \frac{1}{3} \pi (4R - 6x)$ $V''(\frac{4}{3}R) = \frac{1}{3} \pi (4R - 8R) < 0$ $x = \frac{4}{3}R$ 时, $V(x)$ 取极大值, 又 $x = \frac{4}{3}R$ 是 $(0, 2R)$ 内唯一的极值点, $V(\frac{4}{3}R)$ 就是最大值点, 此时 $V(\frac{4}{3}R) = \frac{32}{81} \pi R^3$ 综上知, 高为 $\frac{4}{3}R$ 时, 圆锥体积最大, 最大为 $\frac{32}{81} \pi R^3$

题号 B4 4.3节

三 1 证明: 当 $x > 1$ 时, $e^x > ex$
证明: 设 $f(x) = e^x - ex$, 当 $x > 1$ 时, 由拉格朗日定理,

$$f(x) - f(1) = f'(\xi)(x-1) \quad \xi \in (1, x)$$

$$\text{即 } (e^x - ex) - (e^1 - e \cdot 1) = (e^\xi - e)^{(x-1)} > 0 \Rightarrow e^x > ex$$

注 $f'(x) = e^x - e \Rightarrow f'(\xi) = e^\xi - e$

2 证明: 当 $x > 0$ 时, $\arctan x + \frac{1}{x} > \frac{\pi}{2}$

证明: 设 $f(x) = \arctan x + \frac{1}{x} \quad (x > 0)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{-1}{(1+x^2)x^2} < 0, \text{ 即 } f(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上}$$

单调递减。又 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\arctan x + \frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$, 由极限的保序性

知, $\forall x > 0, \arctan x + \frac{1}{x} > \frac{\pi}{2}$

3 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 在 $(a, +\infty)$ 内 $f''(x) > 0$, 证明:

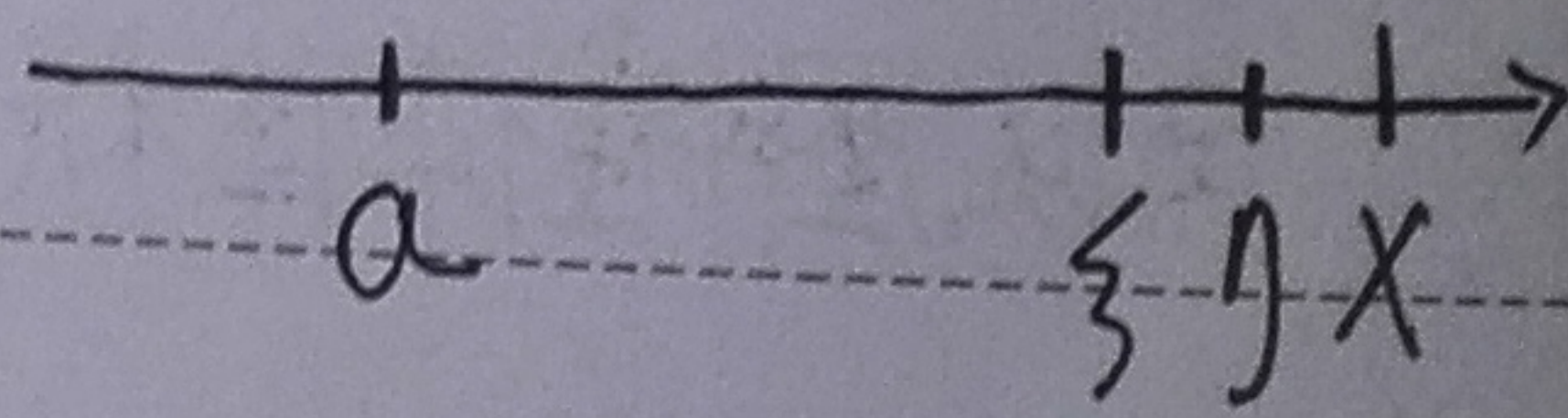
$$F(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ 在 } (a, +\infty) \text{ 内单调增加.}$$

证明: $F'(x) = \frac{f'(x)(x-a) - [f(x) - f(a)]}{(x-a)^2} \quad (x > a)$

$$= \frac{f'(x)(x-a) - f'(\xi)(x-a)}{(x-a)^2}$$

$$= \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x-a}$$

$$= \frac{f''(\eta)(x-\xi)}{x-a} > 0$$



所以 $F(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 内单调增加

证 由拉格朗日定理 $f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a) \quad \xi \in (a, x)$

$$f'(x) - f'(\xi) = f''(\eta)(x-\xi) \quad \eta \in (\xi, x)$$